UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

PIMES - PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA
Disciplina: MATEMÁTICA I
1° **Semestre de 2001.**
Data: 29/03/2001

PROF. ALEXANDRE STAMFORD

1. Mostre que os seguintes conjuntos formam um espaço vetorial:
   (a) O Conjunto das matrizes n x m.
   (b) Os polinômios de grau n.
   (c) Os vetores do $\mathbb{R}^n$
2. Dadas duas bases, $\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$, do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Monte uma transformação linear que quando aplicada permita representar os vetores que estão em uma base na outra.
3. Seja $\mathbf{P}$ uma matriz inversível e $\mathbf{A}$ uma matriz qualquer da mesma ordem de $\mathbf{P}$. Mostre que a transformação $\mathbf{PAP}^{-1}$ tem os mesmos autovalores de $\mathbf{A}$. Mostre também que se $\mathbf{A}$ tiver autovalores diferentes e $\mathbf{P}$ for a matriz dos autovetores então $\mathbf{PAP}^{-1}$ é uma matriz diagonal $\mathbf{D}$ que tem como elementos da diagonal principal os autovalores de $\mathbf{A}$.

   Dica: Cada uma das partes é um teorema basta prová-los. Na primeira parte use a definição de polinômio característico e mostre que os polinômios têm a mesma raízes. Na segunda use o fato de que $Av = av$.
4. Para cada uma das matrizes seguintes determine os autovalores e os autovetores correspondentes; se a matriz é similar a uma diagonal, ache a matriz dos autovetores $\mathbf{P}$ e mostre que $\mathbf{PAP}^{-1}$ é diagonal:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix};$$

5. Mostre que uma matriz e sua transposta têm o mesmo polinômio característico.
6. Pesquise o que é uma forma de Jordan no procedimento de diagonalização quando a matriz tem autovalores repetidos. Mostre os procedimentos para se conseguir as formas de Jordan quando os autovetores são linearmente dependentes e independentes. Dê exemplos de matrizes quadradas de ordem 3 e 4.

7. A **Matriz de Probabilidade** é uma matriz n x n que tem duas propriedades:

   (a) $a_{ij} \geq 0 \qquad \forall \qquad i$ e j.

   (b) A soma dos componentes de toda coluna é 1.

   Prove que 1 é um autovalor de toda matriz de probabilidade.

8. Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes n x n reais com autovalores distintos. Prove que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ se e somente se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ têm os mesmos autovetores.

9. Uma forma quadrática $F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ é dita **Definida Positiva** se $F(\mathbf{x}) \geq 0 \ \ \forall \ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $F(\mathbf{x}) = 0$ se e somente se $\mathbf{x} = 0$. Mostre que F é definida positiva sse a matriz simétrica $\mathbf{A}$ associada a F tem autovalores positivos.

10. Uma forma quadrática $F(\mathbf{x})$ é dita **Semidefinida Positiva** se $F(\mathbf{x}) \geq 0 \ \ \forall \ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Mostre que F é semidefinida positiva sse a matriz simétrica $\mathbf{A}$ associada a F tem autovalores não negativos.

11. As definições de **Definida Negativa** e **Semidefinida Negativa** são análogas as definições dos quesitos 9 e 10 colocando-se no lugar de $\geq$ o sinal $\leq$. Uma forma quadrática é **indefinida** ela não se enquadra em nenhuma das definições apresentadas. Nos ítens abaixo determine se a dada forma quadrática é definida positiva, definida negativa, semidefinida positiva, semidefinida negativa, ou indefinida.

a) $3x^2 + 2y^2$;	b) $-3x^2 - 3y^2$;	c) $3x^2 - 2y^2$;
d) $x^2 + 2xy + 2y^2$;	e) $x^2 - 2xy + 2y^2$;	f) $x^2 - 4xy + 3y^2$;
g) $-x^2 + 4xy - 3y^2$;	h) $-x^2 + 2xy - 2y^2$;	i) $-x^2 - 4xy - 3y^2$;

12. Ache o núcleo das seguintes transformações lineares:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (2x - y, 4x + 7y)$;

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 4y + 3z, x + 2y - 6z)$;

   (c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $T(x, y, z) = (y, -x)$;

   (d) $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_4$; $Tp(x) = x^2 p(x)$;

   (e) $T : \mathbf{M}_{22} \to \mathbf{M}_{22}$; $T(A) = AB$ onde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

   (f) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$; $T(x, y, z, w) = (x - 2z, 2y + 3w)$;

Bom Trabalho!

" O único erro verdadeiro é aquele
com o qual nada se aprende"
(J.POWELL)